

# HOMOLOGIE

Classification Thèmes de MegaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

## Suite Exacte d'Homologie

- Ref. Northcott D.G., An introduction to Homological Algebra, Cambridge Univ. Press, 1960 page 60
- Ref. Balcerzyk & Józefiak, Commutative rings, 1989 p 161 (Memento sur "Homological Background")
- Cours de Lemaire DEA Nice

Th : Toute suite exacte de complexes (d'uns de  $R$ -modules,  $R$ =anneau)

$$0 \rightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} W \rightarrow 0$$

induit une suite exacte longue des modules d'homologie :

$$\dots \rightarrow H_p(X) \rightarrow H_p(Y) \rightarrow H_p(W) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X) \rightarrow H_{p-1}(Y) \rightarrow \dots \quad (*)$$

- Le morphisme  $\delta$  est appelé "morphisme de connexion". Il est défini ainsi (cf diag 1) : Si  $w \in Z_p(W)$ , il existe  $y \in Y_p$  tq  $g(y) = w$ . Alors  $d_p(y)$  est dans  $\text{Im } f$  et il existe  $x \in X_{p-1}$  tq  $f(x) = d_p(y)$ . En fait  $x \in Z_{p-1}(X)$  et l'on peut poser  $\delta(w) = x$ .
- Les autres morphismes sont définis de façon triviale.

preuve : Fixons les notations avec le diagramme :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & X_{p+1} & & Y_{p+1} & & W_{p+1} & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & X_p & \xrightarrow{f} & Y_p & \xrightarrow{g} & W_p & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow d_p & & \downarrow d_p & & \downarrow d_p & \\
 0 \rightarrow & X_{p-1} & \rightarrow & Y_{p-1} & \rightarrow & W_{p-1} & \rightarrow 0 \\
 & \downarrow d_{p-1} & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 \rightarrow & X_{p-2} & \rightarrow & Y_{p-2} & \rightarrow & W_{p-2} & \rightarrow 0 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \underbrace{\hspace{10em}} & & & & & \\
 & \text{suite exacte de complexes} & & & & & 
 \end{array} \quad (\text{diag 1})$$

$X =$  complexe de  $R$ -modules  $\dots \rightarrow X_p \xrightarrow{d_p} X_{p-1} \rightarrow \dots$

(ie les  $X_p$  sont des  $R$ -modules  
les  $d_p$  sont linéaires, et  
 $d_{p-1} \circ d_p = 0$ )

① Définition du morphisme  $H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$  :

$$\text{On pose } H_p(X) \xrightarrow{H_p(\beta)} H_p(Y) \\ \bar{x} \mapsto \overline{\beta(x)}$$

$H_p(\beta)$  est bien déf. car si  $\bar{x} = \bar{x}'$ ,  $x - x' \in B_p$  donc  $x - x' = d_{p+1}(z)$  où  $z \in X_{p+1}$ .

Alors  $\beta(x) - \beta(x') = \beta(x - x') = \beta \circ d_{p+1}(z) = d_p \circ \beta(z) \in B_p(Y)$  entraîne  $\overline{\beta(x)} = \overline{\beta(x')}$   $\square$

② La suite  $H_p(X) \xrightarrow{H_p(\beta)} H_p(Y) \xrightarrow{H_p(g)} H_p(W)$  est exacte en  $H_p(Y)$  :

$$H_p(g) \circ H_p(\beta)(\bar{x}) = \overline{g \circ \beta(x)} = \bar{0} \quad \text{donc } \text{Im } H_p(\beta) \subset \text{Ker } H_p(g)$$

Réc., si  $y \in \text{Ker } H_p(g)$ ,  $g(y) \in B_p(W)$  soit

$$g(y) = d_{p+1}(w)$$

Il existe  $y' \in Y_{p+1}$  tq  $w = g(y')$  donc

$$g(y) = d_{p+1} \circ g(y') = g \circ d_{p+1}(y')$$

donc  $y - d_{p+1}(y') \in \text{Ker } g = \text{Im } \beta$  et il existe  $x \in X_p$  tq

$$y - d_{p+1}(y') = \beta(x)$$

soit

$$\boxed{y = \overline{\beta(x)} \text{ dans } H_p(Y)}$$

$\bar{x}$  est un cycle puisque

$$\begin{aligned} d_p(x) = 0 &\Leftrightarrow \beta \circ d_p(x) = 0 \Leftrightarrow d_p \circ \beta(x) = 0 \Leftrightarrow d_p(y - d_{p+1}(y')) = 0 \\ &\Leftrightarrow d_p(y) = 0 \Leftrightarrow y \in Z_p(Y) \text{ vrai} \end{aligned}$$

donc on peut conclure à  $\bar{y} = H_p(\beta)(\bar{x}) \in \text{Im } H_p(\beta)$ .  $\square$

③ Le morphisme de connexion est bien défini :

a) Construction (cf diag. 1) :

$$\left\{ \begin{array}{l} w \in Z_p(W) \longrightarrow \text{pour définir } \delta(w) \\ y \in Y_p \quad g(y) = w \longrightarrow g \text{ surjective} \end{array} \right.$$

$$d_p(y) = \beta(x) \text{ où } x \in X_{p+1} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{car } g \circ d_p(y) = d_p \circ g(y) = d_p(w) = 0 \\ \text{entraîne } d_p(y) \in \text{Ker } g = \text{Im } \beta \end{array} \right.$$

$$x \in Z_{p-1} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{car } d_{p-1}(x) = 0 \Leftrightarrow \beta \circ d_{p-1}(x) = d_{p-1} \circ \underbrace{\beta(x)}_{d_p(y)} = 0 \text{ vrai} \end{array} \right.$$

On pose  $\delta(w) = z$

b) z est indépendant de la construction ci-dessus :

$$\text{Si } \begin{cases} g(y) = g(y') = w & y, y' \in Y_p \\ d_p(y) = \beta(x) \text{ et } d_p(y') = \beta(x') & x, x' \in Z_{p-1} \end{cases}$$

il faut prouver que  $x - x' \in B_{p-1}$

$$\text{On a } \begin{cases} g(y - y') = p(y - y') & (1) \\ \beta(x - x') = d_p(y - y') & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow y - y' \in \text{Ker } g = \text{Im } \beta. \text{ Soit } x'' \in X_p \text{ tq } y - y' = \beta(x'')$$

Alors (2) entraîne :

$$\beta(x - x') = d_p \circ \beta(x'') = \beta \circ d_p(x'') \xRightarrow{\text{bijective}} x - x' = d_p(x'') \in B_{p-1}(X).$$

□

④ La suite (\*) est exacte en  $H_p(W)$  :

• Si  $y \in Z_p(Y)$ ,  $\delta \circ H_p(g)(y) = \delta(\widehat{g(y)}) = z$

où  $\beta(z) = d_p(y) = 0$ , donc  $z = 0$ , donc  $\delta \circ H_p(g) = 0$ .

• Réc., si  $z \in \text{Ker } \delta$ ,  $w \in Z_p(W)$  et il faut trouver  $y' \in Z_p(Y)$  tq  $w = g(y')$ .  
On a

$$\delta(z) = 0 \Leftrightarrow \delta(z) = z = 0 \quad \text{où} \quad \beta(z) = d_p(y) \text{ et } g(y) = w$$

De  $z = 0$ , on déduit l'existence de  $x' \in B_{p-1}(X)$  tq  $z = d_p(x')$ , d'où :

$$d_p(y) = \beta \circ d_p(x') = d_p \circ f(x') \Rightarrow y - \beta(x') \in Z_p(Y)$$

Il suffit de poser  $y' = y - \beta(x') \in Z_p(Y)$  pour constater  $g(y') = w$   $\square$

⑤ La suite (\*) est exacte en  $H_{p-1}(X)$  :

$$\forall w \in Z_p(W) \quad H_{p-1}(\beta) \circ \delta(z) = H_{p-1}(\beta)(z) \quad \text{où } z \text{ vérifie } \begin{cases} y \in Y_p & g(y) = w \\ \beta(z) = d_p(y) \end{cases}$$

$$= \widehat{\beta(z)} = \widehat{d_p(y)} = 0$$

donc  $\text{Im } \delta \subset \text{Ker } H_{p-1}(\beta)$

• Réc., si  $\tilde{z} \in \text{Ker } H_{p-1}(\beta)$  ie si  $\beta(\tilde{z}) \in B_{p-1}(Y)$ , il faut prouver que  $\tilde{z} \in \text{Im } \delta$  autrement dit que  $\tilde{z} = \delta(z')$  où  $w \in Z_p(W)$ , ou encore :

$$\left. \begin{array}{l} \exists w \in Z_p(W) / \begin{cases} \text{Si} \\ y \in Y_p & g(y) = w \\ \beta(z') = d_p(y) \end{cases} \end{array} \right\} \text{ alors } \tilde{z} = \delta(z') = z' \quad (A)$$

(A) est triviale car l'hypothèse s'écrit :

$$\exists y \in Y_p \quad \beta(\tilde{z}) = d_p(y)$$

On choisit  $z = \tilde{z}$  et l'on pose  $g(y) = w$  pour avoir (A). ( $w$  est alors bien un cycle car  $d_p(w) = d_p \circ g(y) = g \circ d_p(y) = g \circ \beta(\tilde{z}) = 0$ )  $\square$

# R-Modules projectifs

Ref: Balcerzyk et Józefiak, Commutative Rings, 1989 p 157 ("Homological Background")

/// Ces notes explicitent un théorème de l'appendice donné en référence ci-dessus, et ne remplacent pas cet excellent appendice.

Def: Un R-module  $F$  est dit projectif si, tout diagramme du style

$$\begin{array}{ccc} & F & \\ & \downarrow & \\ M & \longrightarrow & N \longrightarrow 0 \end{array}$$

où la suite  $M \rightarrow N \rightarrow 0$  est exacte, peut être complétée en un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & \swarrow & \downarrow & & \\ M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

- Tout module libre est projectif puisqu'il suffit de choisir les valeurs d'un morphisme sur chaque élément d'une base de ce module pour déterminer parfaitement ce morphisme. La surjectivité de la flèche  $M \rightarrow N \rightarrow 0$  fait le reste.
- Toute somme directe de modules libres est un module projectif.

Th ; (Caractérisation) . Soit  $F$  un R-module.

1) Le foncteur  $\text{Hom}_R(F, -)$  est toujours exact à gauche.

2) Le foncteur  $\text{Hom}_R(F, -)$  est exact ssi  $F$  est projectif.

preuve :

(1) Quel est le foncteur  $\text{Hom}_R(F, -)$  ?

Catégorie des  $R$ -modules  $\xrightarrow{\quad} \text{Catégorie des } R\text{-modules de } R\text{-modules}$

$$\left( M \xrightarrow{u} N \right) \longmapsto \left( \begin{array}{ccc} \text{Hom}(F, M) & \xrightarrow{\Psi_u} & \text{Hom}(F, N) \\ \beta & \longmapsto & u \circ \beta \end{array} \right)$$

On vérifie que  $\Psi_u$  est bien un homomorphisme de  $R$ -modules :

$$\Psi_u(\lambda\beta + \gamma) = u \circ (\lambda\beta + \gamma) = \lambda u \circ \beta + u \circ \gamma = \lambda \Psi_u(\beta) + \Psi_u(\gamma)$$

1)  $\text{Hom}_R(F, -)$  est exact à gauche :

Si  $0 \rightarrow M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P$  est exacte, il s'agit de mq la suite

$$0 \rightarrow \text{Hom}(F, M) \xrightarrow{\Psi_u} \text{Hom}(F, N) \xrightarrow{\Psi_v} \text{Hom}(F, P)$$

est encore exacte.

• Exactitude en  $\text{Hom}(F, N)$  :

$$\Psi_v \circ \Psi_u(\beta) = \Psi_v(u \circ \beta) = v \circ u \circ \beta = 0 \circ \beta = 0$$

Réc., si  $g \in \text{Ker } \Psi_v$ , on a  $v \circ g = 0$  donc :

$$\forall x \in F \quad v(g(x)) = 0 \Rightarrow g(x) \in \text{Ker } v = \text{Im } u \Rightarrow \exists m_x \in M \quad g(x) = u(m_x)$$

L'application  $\beta : F \rightarrow M$  est un morphisme car

$$x \mapsto m_x$$

$$\forall x, y \in F \quad \forall \lambda \in R$$

$$g(x + \lambda y) = g(x) + \lambda g(y) \Rightarrow u(m_x + \lambda m_y) = u(m_x) + \lambda u(m_y)$$

$$\stackrel{(u \text{ inj.})}{\Rightarrow} m_x + \lambda m_y = m_x + \lambda m_y$$

Donc  $\beta \in \text{Hom}(F, M)$  et  $g = u \circ \beta = \Psi_u(\beta) \in \text{Im } \Psi_u$ .

• Exactitude en  $\text{Hom}(F, M)$  : mq  $\Psi_u$  est injective.

$$\Psi_u(\beta) = 0 \Leftrightarrow u \circ \beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \quad \text{car } u \text{ injective.}$$

2)  $\text{Hom}_R(F, -)$  est exacte ssi il est exacte à droite, et cela équivaut à : " Pour toute suite exacte  $M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \rightarrow 0$ , la suite  $\text{Hom}(F, M) \xrightarrow{\Psi_u} \text{Hom}(F, N) \xrightarrow{\Psi_v} \text{Hom}(F, P) \rightarrow 0$  est exacte " .

Vu l'exactitude (démontrée en 1)) en  $\text{Hom}(F, N)$ , on a :

$$\text{Hom}_R(F, -) \text{ exacte} \iff \left( \begin{array}{l} \text{Pour toute suite exacte } M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \rightarrow 0 \\ \text{l'appl. } \text{Hom}(F, N) \xrightarrow{\Psi_v} \text{Hom}(F, P) \text{ est} \\ \text{surjective} \end{array} \right)$$

$$\iff \left( \begin{array}{l} \text{Pour toute suite exacte } N \xrightarrow{v} P \rightarrow 0 \text{ et} \\ \text{tout endomorphisme } \begin{array}{c} F \\ \downarrow \beta \\ P \end{array}, \text{ il existe } g \in \text{Hom}(F, N) \\ \text{t.q. } v \circ g = \beta \end{array} \right)$$

$$\iff F \text{ projectif.}$$

Complexe de KOSZUL

$M = R$ -module

$\otimes^p M$  = produit tensoriel de  $p$  copies de  $M$

$\Lambda^p M = R$ -module quotient  $\otimes^p M / S$

où  $S$  est le sous-module engendré par les él.  $u_1 \otimes \dots \otimes u_p$  avec  $u_i = u_j$  pour 2 indices  $i \neq j$ . On note  $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$  la classe de  $u_1 \otimes \dots \otimes u_p$  dans  $\Lambda^p M$ .

$$\Lambda^0 M \doteq R$$

$$\Lambda^1 M = M$$

$$\Lambda M \doteq \bigoplus_{p \geq 0} \Lambda^p M \doteq \text{Alg\`ebre ext\`erieure construite sur } M$$

① Propriété universelle

$$\begin{aligned} \omega : M \times \dots \times M &\longrightarrow \Lambda^p M && \text{est } p\text{-lin\`eaire altern\`ee} \\ (u_1, \dots, u_p) &\longmapsto u_1 \wedge \dots \wedge u_p \end{aligned}$$

et pour toute appl.  $p$ -lin\`eaire altern\`ee  $f : M \times \dots \times M \rightarrow N$ , où  $N$  est un  $R$ -module, il existe un unique morphisme  $g$  tq  $f = g \circ \omega$ .

$$\begin{array}{ccc} M \times \dots \times M & \xrightarrow{f} & N \\ \omega \downarrow & \nearrow g & \\ \Lambda^p M & & \end{array}$$

Remarque : Si  $M$  est un  $R$ -module libre de type fini, de base  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors  $\Lambda^p M$  est un  $R$ -module libre de type fini et de base  $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n}$ , donc de rang  $C_n^p$ .

Ref: ① BALCERZYK & JÓZEFIAK, "Commutative Rings" p 175  
② Article de 1962 d'Eagon et Northcott

2

②  $\wedge M$  est une algèbre graduée

- C'est un  $R$ -module
- Multiplication : notée  $\wedge$  et tq  $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$  soit réellement le produit des éléments  $u_1, \dots, u_p \in M = \wedge^1 M$ .

On pose d'abord

$$\begin{cases} \forall \lambda \in R \quad \forall u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in \wedge^p M & \lambda \wedge (u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \doteq \lambda(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \doteq (u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \wedge \lambda \\ \forall u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in \wedge^p M \quad \forall v_1 \wedge \dots \wedge v_q \in \wedge^q M & (u_1 \wedge \dots \wedge u_p) \wedge (v_1 \wedge \dots \wedge v_q) = \underbrace{u_1 \wedge \dots \wedge u_p \wedge v_1 \wedge \dots \wedge v_q}_{\in \wedge^{p+q} M} \end{cases}$$

et cette définition est indépendante du choix des représentants  $u_1 \otimes \dots \otimes u_p$  et  $v_1 \otimes \dots \otimes v_q$  de  $u_1 \wedge \dots \wedge u_p$  et  $v_1 \wedge \dots \wedge v_q$ . En effet,

$$\forall u, u' \in \otimes^p M \quad \forall v, v' \in \otimes^q M \quad \text{avec } u - u' \in S \text{ et } v - v' \in S$$

$$\text{on a } u \otimes v - u' \otimes v' = (u - u') \otimes v + u' \otimes (v - v') \in S.$$

Remarque : on vient d'utiliser la bilinéarité de

$$\begin{aligned} (\otimes^p M) \times (\otimes^q M) &\longrightarrow \otimes^{p+q} M \\ (u, v) &\longmapsto u \otimes v \end{aligned}$$

qui provient de la définition du produit tensoriel (cf [1] produit tensoriel) et de  $\otimes^{p+q} M \doteq (\otimes^p M) \otimes (\otimes^q M)$  (cf propriété de  $\otimes$  :  $A \otimes (B \otimes C) = (A \otimes B) \otimes C \doteq A \otimes B \otimes C$ )

Par passage au quotient, on déduit encore :

$$\begin{aligned} (\wedge^p M) \times (\wedge^q M) &\longrightarrow \wedge^{p+q} M \\ (u, v) &\longmapsto u \wedge v \end{aligned}$$

est bilinéaire.

On vérifie alors que  $\wedge^p M \otimes \wedge^q M \xrightarrow{\wedge} \wedge^{p+q} M$  est une application bilinéaire

Définition du produit en général :

$$\forall a, b \in \wedge M = \bigoplus_{p \geq 0} \wedge^p M \quad \exists! a_p, b_p \in \wedge^p M \quad a = \sum a_p \text{ et } b = \sum b_p$$

(Sommes finies)

et l'on pose

$$a \wedge b = \sum_{p, q} a_p \wedge b_q$$

Proposition :  $\wedge$  est une loi interne sur  $\wedge M$ , associative et distributive par rapport à l'addition.

preuve : Associativité évidente.

Distributivité : en notant  $a = \sum a_p$   $b = \sum b_q$   $c = \sum c_q$

$$a \wedge (b + c) = a \wedge b + a \wedge c \Leftrightarrow \sum_{p, q} a_p \wedge (b_q + c_q) = \sum_{p, q} a_p \wedge b_q + a_p \wedge c_q$$

et tout revient à montrer que

$$\forall a_p \in \wedge^p M \quad \forall b_q, c_q \in \wedge^q M \quad a_p \wedge (b_q + c_q) = a_p \wedge b_q + a_p \wedge c_q$$

c'est acquis d'après la remarque de la p2.  $\square$

Proposition : Caractère alterné

$$\text{On a } (u+v) \wedge (u+v) = 0 \Rightarrow u \wedge v = -v \wedge u \quad \forall u, v \in M \text{ (Antisymétrie)}$$

On déduit par récurrence sur  $p+q=n$  :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \wedge^p M \quad \forall y \in \wedge^q M \quad x \wedge y = (-1)^{pq} y \wedge x$$

preuve : Soit  $H(p, q)$  cette assertion.  $H(0, 0)$ ,  $H(0, 1)$  et  $H(1, 0)$  sont triviaux. Par ex. pour  $H(0, 0)$  :  $\forall \lambda, \mu \in R \quad \lambda \mu = (-1)^{0 \times 0} \mu \lambda$

$$\text{pour } H(0, 1) : \forall \lambda \in R \quad \forall y \in \wedge^1 M = M \quad \lambda \wedge y = \lambda y = (-1)^{0 \times 1} y \wedge \lambda$$

Au rang  $p+q=n$ ,  $x = z \wedge x'$  où  $z \in M$  et  $x' \in \wedge^{p-1} M$  donc

$$\begin{aligned} x \wedge y &= z \wedge (x' \wedge y) = (-1)^{(p-1)q} z \wedge (y \wedge x') = (-1)^{(p-1)q} (z \wedge y) \wedge x' \\ &= (-1)^{(p-1)q} (-1)^q (y \wedge z) \wedge x' \\ &= (-1)^{pq} y \wedge x \quad \square \end{aligned}$$

### ③ Dérivation

Si  $\varphi \in \text{Hom}(M, R)$  on définit le complexe de  $R$ -modules

$$\cdots \rightarrow K_p(\varphi) \xrightarrow{d_p} K_{p-1}(\varphi) \rightarrow \cdots \rightarrow \underbrace{K_1(\varphi)}_M \rightarrow \underbrace{K_0(\varphi)}_R \rightarrow 0$$

en posant  $K_p(\varphi) = \wedge^p M$  et

$$d_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \varphi(u_k) \cdot u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_k \wedge \cdots \wedge u_p$$

- $d_p$  est bien définie grâce à la prop. universelle de  $\wedge^p M$  : vérifier que  $(u_1, \dots, u_p) \mapsto \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^k \varphi(u_k) u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_k \wedge \cdots \wedge u_p$  est bien multilinéaire alternée.
- Vérifions que  $d_{p-1} \circ d_p = 0$

$$d_{p-1} \circ d_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p) = \sum_{\substack{1 \leq l \leq p \\ l \neq k}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq p \\ l \neq k}} (-1)^{k+1} (-1)^l \varphi(u_k) \varphi(u_l) u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_k \wedge \cdots \wedge \hat{u}_l \wedge \cdots \wedge u_p$$

avec  $t = \begin{cases} l & \text{si } k < l \\ l+1 & \text{si } k > l \end{cases}$

$d_{p-1} \circ d_p(u_1 \wedge \cdots \wedge u_p)$  est donc formé de sommes du type,  $k_0 < l_0$  étant fixés :

$$\begin{aligned} \sum_{(k,l) = (k_0, l_0) \text{ ou } (l_0, k_0)} &= (-1)^{k_0+1} (-1)^{l_0} \varphi(u_{k_0}) \varphi(u_{l_0}) u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{k_0} \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{l_0} \wedge \cdots \wedge u_p \\ &\quad + (-1)^{l_0+1} (-1)^{k_0+1} \varphi(u_{k_0}) \varphi(u_{l_0}) u_1 \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{k_0} \wedge \cdots \wedge \hat{u}_{l_0} \wedge \cdots \wedge u_p \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

$$\underline{\text{Pro}} : \forall x \in \wedge^p M \quad \forall y \in \wedge^q M \quad d_{p+q}(x \wedge y) = d_p(x) \wedge y + (-1)^p x \wedge d_q(y)$$

preuve : Si  $x = u_1 \wedge \dots \wedge u_p$  et  $y = u_{p+1} \wedge \dots \wedge u_{p+q}$ ,

$$\begin{aligned} d_{p+q}(x \wedge y) &= \sum_{k=1}^{p+q} (-1)^{k+1} \varphi(u_k) u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_k \wedge \dots \wedge u_{p+q} \\ &= \left( \sum_{k=1}^p \dots \right) \wedge y + x \wedge \left( \sum_{k=p+1}^{p+q} (-1)^{k+1} \varphi(u_k) u_{p+1} \wedge \dots \wedge \hat{u}_k \wedge \dots \wedge u_{p+q} \right) \\ &\quad \downarrow \\ &\quad (k-p)\text{-ième place} \end{aligned}$$

$$= d_p(x) \wedge y + (-1)^p x \wedge d_q(y)$$

□

### Définitions

1) Le complexe  $K(\varphi)$  défini ci-dessus s'appelle "complexe de KOSZUL associé à  $\varphi \in \text{Hom}(M, R)$ "

2) Si  $M$  est un  $R$ -module libre de rang  $n$  et de base  $(e_1, \dots, e_n)$ , et si  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ , on note  $K(x)$  le complexe  $K(\varphi)$  où

$$\varphi : M \longrightarrow R$$

$$\sum \lambda_i e_i \longmapsto \sum \lambda_i x_i$$

$K(x)$  s'appelle "le complexe de KOSZUL associé à la suite 'bc'"

3) Si  $N$  est un  $R$ -module

$K(\varphi; N)$  est le complexe  $K(\varphi) \otimes_R N$  de différentielle  $d_p \otimes 1$

$K(x; N)$  "  $K(x) \otimes_R N$  "

Th 1 :  $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$   
 $N = R$ -module

$$H_0(K(x; N)) = \frac{N}{(x_1, \dots, x_n)N}$$

NB: Dans cette écriture et en notant  $I$  l'idéal de  $R$  engendré par  $x_1, \dots, x_n$ , ie  $I = (x_1, \dots, x_n)$ , on note  $IN$  le sous-module de  $N$  engendré par les  $in$  où  $i \in I$  et  $n \in N$ , ie  $IN = \{ \sum_{i \in I} i n_i / i \in I, n_i \in N \text{ et somme finie} \}$ .

$$K: K_n \xrightarrow{\quad} K_p \xrightarrow{d_p} K_{p-1} \xrightarrow{\quad} \dots \xrightarrow{\quad} K_1 \xrightarrow{d_1} K_0 \rightarrow 0$$

$\parallel$   $\parallel$   $\parallel$   
 $\Lambda^p M \otimes N$   $M \otimes N$   $R \otimes N$

$$H_0(K) = \frac{K_0}{\text{Im } d_1} = \frac{R \otimes N}{\text{Im } d_1}$$

•  $d_p(u_1 \wedge \dots \wedge u_p) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k+1} \varphi(u_k) u_1 \wedge \dots \wedge \hat{u}_k \wedge \dots \wedge u_p$  pour  $K(\varphi)$ , donc

$$d_1(u \otimes n) = d_1(u) \otimes n = \varphi(u) \otimes n$$

Soi  $u = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ ,  $\lambda_i \in R$ ,  $e_i \in M$  et  $\varphi(u) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ , donc

$$d_1(u \otimes n) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes n$$

• Posons  $\Psi: R \otimes N \longrightarrow \frac{N}{(x_1, \dots, x_n)N}$

$r \otimes n \longmapsto \overline{rn}$

( $\Psi$  bien définie grâce à la propriété universelle de  $\otimes$ , et elle est surjective.

On a :

$$\begin{aligned} \Psi(r \otimes n) = 0 &\Leftrightarrow rn = \sum_{i=1}^n \lambda_i n_i; (n_i \in N) \Leftrightarrow r \otimes n = 1 \otimes rn = 1 \otimes \sum_{i=1}^n \lambda_i n_i \\ &\Leftrightarrow r \otimes n = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes n_i \end{aligned}$$

Ce qui prouve que  $\text{Ker } \Psi = \text{Im } d_1$  et l'isomorphisme...  $\square$

(\*) on utilise l'isomorphisme  $R \otimes N \xrightarrow{\sim} N$  bien connu... qui permet d'affirmer que  $R \otimes N \cong N$  (voir aussi  $R^? \otimes N \cong N^?$  dans [U] en dual tensoriel)

Th 2 :  $H_p(K(x; N))$  est annihilé par l'idéal  $(x_1, \dots, x_n) + \text{Ann } N$

preuve :

$$H_p(K) = \frac{\ker d_p}{\text{Im } d_{p+1}} = \frac{\mathbb{Z}_p}{B_p}$$

Si  $z$  est un  $p$ -cycle, il faut montrer que  $x_i z \in B_p$ . Cela provient du calcul :

$$\begin{aligned} (d_{p+1})_*(e_i \wedge z) &= d_1(e_i) \wedge z - e_i \wedge \underbrace{d_p(z)}_{=0} && \begin{array}{l} \text{(abus)} \\ \text{(cf Prop)} \end{array} \\ &= x_i z \end{aligned}$$

Ainsi tout élément de  $H_p(K)$  est annihilé par l'idéal  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Comme  $\text{Ann } N$  annule  $H_p(K)$  de façon triviale, la prop. s'en déduit.  $\square$

De plus,  $\text{Ann } N$  annule  $z$ .  $\square$

### Quelques définitions pour préparer le Th 3 :

- ① Une suite  $x = (x_1, \dots, x_n)$  d'un anneau  $R$  est dite régulière si  $x_1$  n'est pas diviseur de 0 dans  $R$  et si
- $$\forall k \in \{2, \dots, n\} \quad x_k \in R \setminus \frac{R}{(x_1, \dots, x_{k-1})} \quad \text{n'est pas diviseur de zéro.}$$

- ② La profondeur d'un idéal (depth) est la longueur maximale d'une suite régulière de cet idéal.

- ③ Un complexe de  $R$ -modules est la donnée des  $R$ -modules  $F_p$  et de différentielles  $d_p : F_p \rightarrow F_{p-1}$  (ce sont des morph. de  $R$ -modules) vérifiant  $d_{p-1} \circ d_p = 0$ , et l'on note

$$\cdots \rightarrow F_p \xrightarrow{d_p} F_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow 0 \quad (1)$$

- ④ Une résolution libre du  $R$ -module  $M$  est la donnée d'une suite exacte de  $R$ -modules du style

$$\cdots \rightarrow F_p \rightarrow \cdots \rightarrow F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

où tous les modules  $F_p$  sont libres.

- ⑤ NB : Étant donné un complexe  $F$  de  $R$ -modules libres (1),  $H_0 = \frac{Z_0}{B_0} = \frac{F_0}{\text{Im } d_1}$  est le 0-ième module d'homologie, et l'on a

$$\cdots \rightarrow F_p \xrightarrow{d_p} F_{p-1} \rightarrow \cdots \rightarrow F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \rightarrow \underbrace{\frac{F_0}{\text{Im } d_1} = H_0}_{\text{2 mailles exactes (en } F_0 \text{ et } H_0)} \rightarrow 0$$

2 mailles exactes (en  $F_0$  et  $H_0$ )

Vérifier que ce complexe est une résolution libre de  $F_0 / \text{Im } d_1$  revient alors à prouver que  $H_p(F) = 0$  pour tout  $p \geq 1$  (ie que la suite est exacte en chaque  $F_p$  où  $p \geq 1$ ). C'est ce qu'on va utiliser dans la démonstration du Th 3 ...

Th 3 : Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est une suite régulière de  $R$ ,  
le complexe de KOSZUL  $K(x)$  est une résolution libre du  
 $R$ -module  $R / (x_1, \dots, x_n)$

preuve: Récurrence sur  $n$

• Si  $n=1$ ,  $M = R e_1$  et  $K(x)$  est le complexe

$$0 \rightarrow R e_1 \xrightarrow{d_1} R \rightarrow 0$$

$$r e_1 \mapsto r x_1$$

et l'on déduit que la suite

$$0 \rightarrow R e_1 \xrightarrow{d_1} R \rightarrow R / (x_1) \rightarrow 0$$

est la résolution libre cherchée: en effet,  $\ker d_1 = \{0\}$  car  $x_1$  n'est pas diviseur de 0 dans  $R$ .

• Au rang  $n$ , notons  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base de  $M$   
 $E = E \oplus R e_n$  et  $E = R e_1 \oplus \dots \oplus R e_{n-1}$

$$X \equiv K(x_1, \dots, x_{n-1}) \subset K = K(x_1, \dots, x_n) = K(x)$$

sous-complexe

puisque  $\Lambda^p M = \Lambda^p E \oplus (\Lambda^{p-1} E \otimes R e_n)$  et d'après la def. de la dérivation  $d_p$ .

En effet  $M = E \oplus R e_n$  donc  $u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in \Lambda^p M$  s'écrit  
 $u_i = v_i + r_i e_n$

$$u_1 \wedge \dots \wedge u_p = (v_1 + r_1 e_n) \wedge \dots \wedge (v_p + r_p e_n) = v_1 \wedge \dots \wedge v_p + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq p} (\text{coeff. dans } R) \underbrace{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}}}_{\in \Lambda^{p-1} E} \wedge e_n$$

Idee plus précise:  $\Lambda^{p-1} E \otimes R e_n \rightarrow \Lambda^{p-1} E \wedge (R e_n)$

$$(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}}) \otimes e_n \mapsto v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}} \wedge e_n$$

est  $R$ -linéaire (cf. ho. Univ. de  $\otimes$ ), surjective. L'injecti-  
-vité provient de " $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p-1}})_{1 \leq i_1 < \dots < i_{p-1} \leq p-1}$  est une base de  $\Lambda^{p-1} E$ ".

En effet, si  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}} \wedge e_n = 0$ , on écrit  
 $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}}$  en pnt des  $a_{i_1} \wedge \dots \wedge a_{i_{p-1}}$ , et comme  $e_n$  n'intervient  
pas dans  $a_{i_p}$ , on déduit puisque  $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq p}$   
est une base de  $\Lambda^p M$ , que  $v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}} = 0$  donc  $(v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}}) \otimes e_n = 0$  □

identification avec ce produit tensoriel  
car les  $v_i$  qui interviennent sont oculement  
comb. linéaires des  $e_1, \dots, e_{n-1}$ , et ne peuvent  
donner lieu à des égalité avec le dernier terme  $e_n$ .

$Y = \text{complexe quotient } K/X$

On a la suite exacte

$$0 \rightarrow X \rightarrow K \rightarrow Y \rightarrow 0$$

avec  $\gamma_p = \frac{K_p}{X_p} \approx X_{p-1}$

car  $u_1 \wedge \dots \wedge u_p \in K_p = \Lambda^p M$

$$u_i \in M = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_n$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p \in X_p = \Lambda^p E$$

$$v_i \in E = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_{n-1}$$

$$M = E \oplus \mathbb{R}e_n$$

$$u_i = v_i + x_i e_n$$

Dans  $K_P/X_P$ ,  $\overline{u_1 \wedge \dots \wedge u_p} = \overline{(v_1 + r_1 e_n) \wedge \dots \wedge (v_p + r_p e_n)}$   
 $= \overline{\sum (\text{coeff. ds } R) v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{p-1}} \wedge e_n}$

$$\text{et } X_{p-1} \longrightarrow Y_p = K_p / X_p$$

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \mapsto \overline{v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \wedge e_n}$$

est un isomorphisme ( $f_{R, \ell}(\ell)$ )  
 (pour l'injectivité, rappelez-vous que  $M = \bigoplus_{i=1}^{\ell} R e_i$  est  
 un  $R$ -mod. libre, donc que  $(e_{j_1}, \dots, e_{j_p})$  est une base  
 de  $\wedge^p M = K^p$ . En exprimant les  $v_i$  dans la base  
 $(e_1, \dots, e_n)$ , on trouve  

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} \wedge e_1 = 0 \Rightarrow v_1 \wedge \dots \wedge v_{p-1} = 0$$
)

On déduit  $H_p(Y) \cong H_{p-1}(X)$  et l'hypothèse récurrente entraîne

$H_p(X) = 0$  pour  $p \geq 1$ , donc  $H_p(Y) = 0$  pour  $p \geq 2$

La suite exacte de complexes

$$0 \rightarrow X' \rightarrow K \rightarrow Y \rightarrow 0$$

induit la suite exacte d'homologie

$$\cdots \rightarrow H_p(X) \xrightarrow{0} H_p(Y) \xrightarrow{0} H_p(Z) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}(X) \rightarrow \cdots$$

done  $H_p(K) = 0 \quad \forall p \geq 2$

On a la suite exacte

$$\dots \rightarrow \overset{H_1(X)}{0} \rightarrow H_1(K) \rightarrow H_1(Y) \xrightarrow{\delta} H_0(X)$$

donc  $H_1(K) = \text{Ker } \delta$

LEMME

Un calcul direct mq la composition de l'isomorphisme  $H_0(X) \simeq H_1(Y)$  et du morphisme de connexion  $\delta$  est la multiplication par  $x_n : H_0(X) \rightarrow H_0(X)$ , soit

$$H_0(X) \xrightarrow[\sim]{g} H_1(Y) \xrightarrow{\delta} H_0(X) \xrightarrow{x_n} H_0(X)$$

ce qui entraîne

$$H_1(K) = \text{Ker } \delta = g(\text{Ker } x_n) = g(\{0\}) = \{0\}$$

puisque  $\text{Ker } x_n = \{0\}$  par hypothèse.

En effet,  $x_n : H_0(X) = \frac{R}{(x_1, \dots, x_{n-1})} \xrightarrow{x_n} H_0(X) = \frac{R}{(x_1, \dots, x_n)}$

et  $x_n$  n'est pas diviseur de zéro dans  $\frac{R}{(x_1, \dots, x_{n-1})}$ , la suite  $x$  étant supposée régulière.

□

● Preuve du lemme p10 : on a la situation

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 X_2 & & K_2 = \Lambda^2 M & & Y_2 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 \rightarrow X_1 = E & \rightarrow & K_1 = M & \rightarrow & Y_1 = M/E \rightarrow 0 \\
 \delta \swarrow & \downarrow d_1 & \downarrow d_1 & \searrow \downarrow d_1 & \\
 0 \rightarrow X_0 = R & \rightarrow & K_0 = R & \rightarrow & Y_0 = K_0/X_0 = 0 \rightarrow 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & & 0 & & 0 \\
 \underbrace{\hspace{10em}} & & & & \\
 \text{complexes de Koszul} & & & & 
 \end{array}$$

La preuve du lemme est articulée en 2 temps : expliciter  $\delta$ , puis exhiber un isomorphisme  $g$ .

(a) Expliciter  $\delta$  :

Si  $m \in M$ ,  $\bar{m} \in M/E$  et en supposant que  $\bar{m}$  est un cycle, on sait que  $\delta(\bar{m}) = \text{classe d'un antécédent de } d_1(m) \in K_0 = R \text{ par } X_0 = R \xrightarrow{\sim} K_0 = R = \overline{d_1(m)}$

Comme  $m = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \Rightarrow d_1(m) = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$  et comme  $\delta(\bar{m})$  ne dépend pas des représentants choisis pour le définir (cf. généralités sur le morphisme de connexion), on peut choisir un représentant  $m \in M$  de  $\bar{m}$  de la forme :

$$m = \lambda e_n \quad \lambda \in R$$

d'où que

$$\delta(\bar{m}) = \overline{d_1(m)} = \lambda \bar{x}_n$$

(b) Exhiber  $g$  : on a envie de poser

$$H_0(X) = \frac{R}{(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})} \xrightarrow[g]{\sim} H_1(Y) \xrightarrow{\delta} H_0(X)$$

$$\alpha \longmapsto \alpha e_n \longmapsto \alpha \alpha_n = \alpha \alpha_n$$

puisque l'on voit bien qu'alors  $\delta \circ g$  est la multiplication par  $\alpha_n$ .  
 Il reste seulement à vérifier que

- ①  $g$  est bien définie
- ②  $g$  est bijective.

①  $g$  est bien définie :

- \*  $\alpha e_n$  est bien un cycle dans  $Z_1(Y)$  car  $\gamma_0 = \frac{K_0}{K_0} = 0$  (donc  $Z_1(Y) = Y_1$ )
- \* Si  $\alpha - \alpha' \in (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ , il faut mq  $\alpha e_n - \alpha' e_n \in B_1(Y)$ .

On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha e_n - \alpha' e_n = \left( \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i \right) e_n \\ d_2(\underbrace{\alpha_1 \wedge \alpha_2}_{\in K_2}) = \underbrace{d_1(\alpha_1)}_{\in R} \wedge \alpha_2 - \alpha_1 \wedge \underbrace{d_1(\alpha_2)}_{\in R} = d_1(\alpha_1) \alpha_2 - d_1(\alpha_2) \alpha_1 \\ d_1\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i}_{\in K_1}\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i \end{array} \right.$$

$$\text{Donc } d_2\left(\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i\right) \wedge e_n}_{\in K_2}\right) = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \alpha_i\right) e_n}_{\in K_1} - \alpha_n \left(\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i\right)$$

Par passage au quotient (dans  $K_1/X_1 = Y_1 = M/E$ ), les termes comb. lin. des  $e_1, \dots, e_{n-1}$  disparaissent et :

$$d_2\left(\quad\right) = \alpha e_n - \alpha' e_n$$

est un bord.  $\square$

② g est bijective : elle est clairement surjective vu le passage au quotient modulo  $E = Re_1 \oplus \dots \oplus Re_{n-1}$ . On a vu que

$$\delta \circ g = \text{multiplication par } i_n$$

Par hypothèse, la multiplication par  $i_n$  de  $H_0(X) = R / (i_1, \dots, i_{n-1})$  dans  $H_0(X)$  est injective, donc

$$\delta \circ g \text{ injective}$$

donc g injective.  $\square$

Le lemme est démontré.  $\square$